Wahrscheinlichkeitsrechnung: Fakultät

Eine Anzahl von Studenten wird zum Testat nach vorne geholt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es , diese aufzustellen?

Anzahl der Studenten	Möglichkeiten	Anzahl der Möglichkeiten
1 (A)	A	1
2 (A, B)	AB; BA	2
3 (A, B, C)	CAB; CBA; ACB; BCA; ABC; BAC	$3 \cdot 2 = 6$
⋮	⋮	⋮
n		$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Fakultät

$0! := 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialkoeffizient

Anzahl der möglichen Ziehungen im Lotto (6 aus 49):

Erste Kugel: 49 Möglichkeiten

Zweite Kugel (kein Zurücklegen): 48 Möglichkeiten

Erste und zweite Kugel: $49 \cdot 48$ Möglichkeiten

⋮

Erste bis sechste Kugel: $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten

Ist das das interessierende Ergebnis? Nein! – Warum?

1. Ziehung: {7; 18; 5; 43; 1; 22}
2. Ziehung: {18; 7; 5; 43; 1; 22}

Beide Ziehungen sind gleich,
(**Reihenfolge der Zahlen interessiert nicht**)

Wie viele Reihenfolgen gibt es für sechs Kugeln? 6!

Also ist das richtige Ergebnis:

$$\boxed{\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialkoeffizient

Behauptung: $$\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{49!}{6!\cdot(49-6)!} = \frac{(49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44)\cdot\cancel{(43\cdot 42\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)}}{6!\cdot\cancel{(43\cdot 42\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)}}$$

Definition: $$\frac{49!}{6!\cdot(49-6)!} =: \binom{49}{6}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

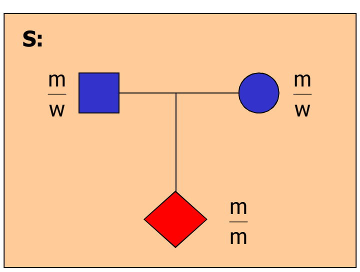
gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge mit n Elementen k Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge der ausgewählten Elemente nicht berücksichtigt wird.

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung

Vererbung von Phenylkentonurie (PKU)



Phänotyp: krank, gesund

PKU ist eine rezessiv autosomal vererbte monogene Krankheit.

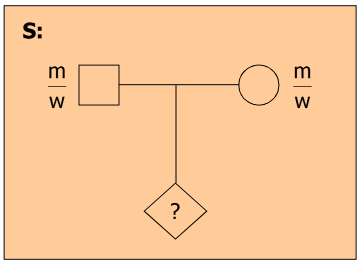
Wie sehen die Genotypen im Stammbaum aus?

m: mutantes Allel
w: Wildtyp

universitätbonn

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung

IMBIE



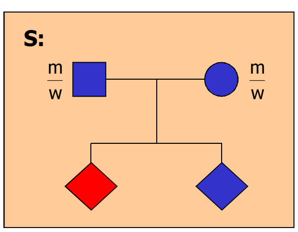
$$P(\text{Kind krank} \mid S)$$
$$= P\left(\text{Kind krank} \,\middle|\, V: \frac{m}{w}; M: \frac{m}{w}\right)$$
$$= P\left(\frac{m}{m} \,\middle|\, V: \frac{m}{w}; M: \frac{m}{w}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Kind gesund} \mid S)$$
$$= 1 - P(\text{Kind krank} \mid S) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

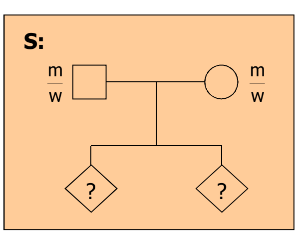
universitätbonn

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung

IMBIE

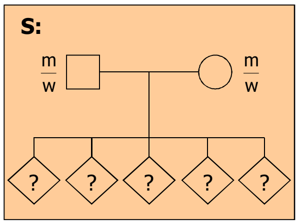


$$P(1.\ \text{Kind krank},\ 2.\ \text{Kind gesund} \mid S)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$



$$P(1\ \text{Kind krank},\ 1\ \text{Kind gesund} \mid S)$$
$$= {\color{red}2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung



$$P(2\text{ Kinder krank, }3\text{ Kinder gesund}\,|\,S)$$

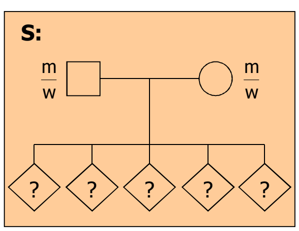
$$= \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{Reihenfolge}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{krankes Kind}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{krankes Kind}}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{gesundes Kind}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{gesundes Kind}} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{gesundes Kind}}}$$

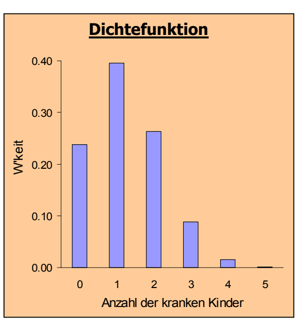
$$= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

p: Wahrscheinlichkeit für den Einzelerfolg
n: Zahl der unabhängigen Experimente
k: Zahl der Erfolge

Binomialverteilung: $B(n,k,p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung





p = 1/4 (W. für krankes Kind)
⇒ (1-p) = 3/4 (W. für gesundes Kind)

$$P(0\text{ kranke Kinder}\,|\,S) = \binom{5}{0} \cdot (1/4)^0 \cdot (3/4)^5 \qquad = 0{,}237$$

$$P(1\text{ krankes Kind}\,|\,S) = \binom{5}{1} \cdot (1/4)^1 \cdot (3/4)^4 \qquad = 0{,}396$$

$$P(2\text{ kranke Kinder}\,|\,S) = \binom{5}{2} \cdot (1/4)^2 \cdot (3/4)^3 \qquad = 0{,}264$$

$$P(3\text{ kranke Kinder}\,|\,S) = \binom{5}{3} \cdot (1/4)^3 \cdot (3/4)^2 \qquad = 0{,}088$$

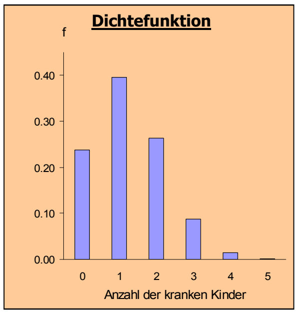
$$P(4\text{ kranke Kinder}\,|\,S) = \binom{5}{4} \cdot (1/4)^4 \cdot (3/4)^1 \qquad = 0{,}015$$

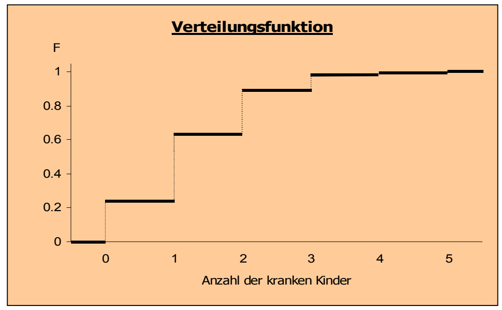
$$P(5\text{ kranke Kinder}\,|\,S) = \binom{5}{5} \cdot (1/4)^5 \cdot (3/4)^0 \qquad = 0{,}001$$

universitätbonn

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Binomialverteilung

IMBIE





universitätbonn

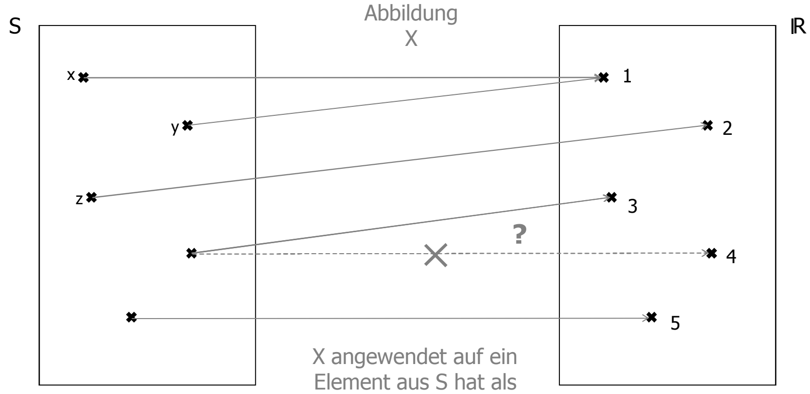
Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

Wahrscheinlichkeitsmodell

Zuordnung
Abbildung
X

Menge der reellen Zahlen



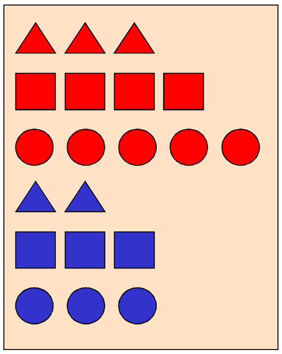
X angewendet auf ein Element aus S hat als Ergebnis eine Zahl

Wahrscheinlichkeit P

X: Zufallsgröße / Zufallsvariable

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

S



$P = \frac{1}{20}$

Definition einer Zufallsvariablen X

X: Anzahl der Ecken

X(△) = 3

X(□) = 4

X(○) = 0

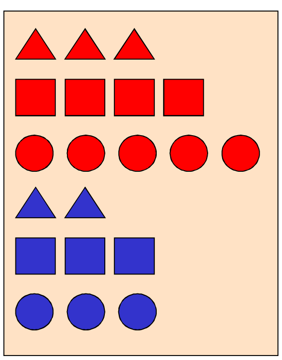
Y: rot → 1
blau → 2

Y(■) = 1

Y(■) = 2

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

S



$P = \frac{1}{20}$

X: Anzahl der Ecken

<u>Frage</u>:

P(X = 3) = ? (Schlamperei)

<u>korrekte Schreibweise</u>:

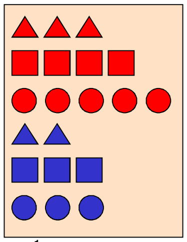
$P(\{a \in S \mid X(a) = 3\}) = \frac{5}{20}$

Oft wird die „schlampige" Schreibweise benutzt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

S



$P = \frac{1}{20}$

X: Anzahl der Ecken

$P(X = 0) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$P(X = 2) = 0$

$P(X = 3) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$P(X = 4) = \frac{7}{20}$

$P(X = 5) = 0$

$P(X < 0) = 0$

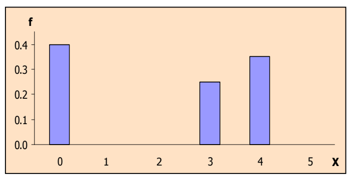
$P(X \leq 0) = \frac{2}{5}$

$P(X \leq 2) = \frac{2}{5}$

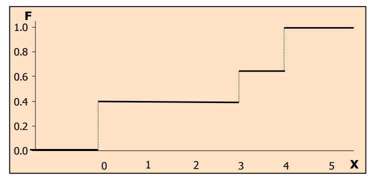
$P(X \leq 3) = \frac{13}{20}$

$P(X \leq 4) = 1$

$P(X \leq 5) = 1$



Dichtefunktion



Verteilungsfunktion

der Zufallsvariablen X
auf dem Wahrscheinlichkeitsmodell (S, P)

Verteilungsfunktion: $F(a) = P(X \leq a)$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

Lageparameter

Stichprobe	Modell	Beispiel
Mittelwert	Erwartungswert	
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$		
$\bar{x} = \sum h_j w_j$	$\mu = \sum p_i w_i$	$\mu = 0 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{7}{20} = 2.15$
Empirische Varianz	Varianz	
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sigma^2 = \sum p_i (w_i - \mu)^2$	$\sigma^2 = \frac{2}{5} \cdot (0 - 2.15)^2 + \frac{1}{4} \cdot (3 - 2.15)^2 + \frac{7}{20} \cdot (4 - 2.15)^2 = 3.23$
Emp. Standardabweichung	Standardabweichung	
$s = \sqrt[+]{s^2}$	$\sigma = \sqrt[+]{\sigma^2}$	$\sigma = 1.80$

Beispiel:

w_i	p_i
0	2/5
3	1/4
4	7/20

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

Nachtrag zur Binomialverteilung

$$B(n,k,p)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

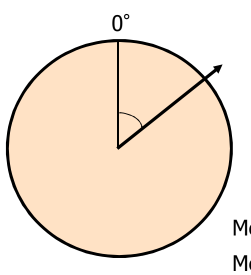
Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$

Varianz: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt[+]{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: stetige Zufallsvariable

IMBIE



Zufallsvariable: gemessener Winkel W

P: alle Winkel gleichwahrscheinlich

P(W = 180°) = ?

Messgenauigkeit: 1° $\Rightarrow$ 360 Möglichkeiten mit P=1/360

Messgenauigkeit: 0.1° $\Rightarrow$ 3600 Möglichkeiten mit P=1/3600

Messgenauigkeit: 0.01° $\Rightarrow$ 36000 Möglichkeiten mit P=1/36000

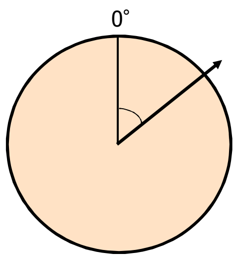
$\vdots$

n Möglichkeiten mit P=1/n

$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \to 0$

$\boxed{P(W = 180°) = 0}$

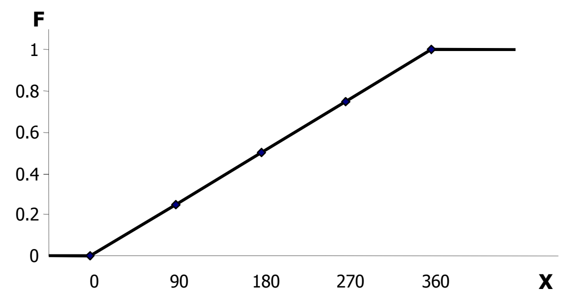
Wahrscheinlichkeitsrechnung: stetige Zufallsvariable



Zufallsvariable: gemessener Winkel W

P: alle Winkel gleichwahrscheinlich

Verteilungsfunktion: $F(a) = P(W \le a)$



$F(0) = P(W \le 0°) = 0$

$F(90) = P(W \le 90°) = \frac{1}{4}$

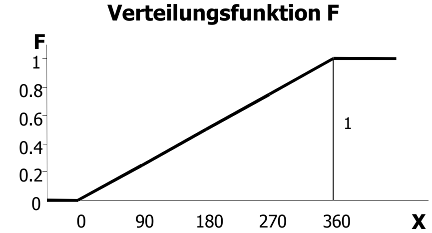
$F(180) = P(W \le 180°) = \frac{1}{2}$

$F(270) = P(W \le 270°) = \frac{3}{4}$

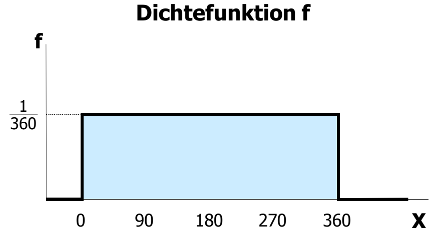
$F(360) = P(W \le 360°) = 1$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: stetige Zufallsvariable

Verteilungsfunktion F



Dichtefunktion f



$f = F'$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

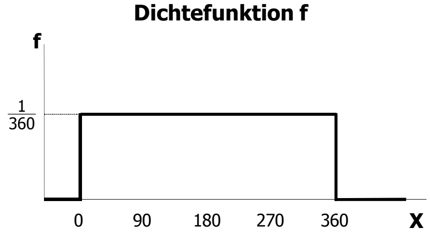
Lage- und Streuungsparameter

	Diskrete Zufallsvariable	Stetige Zufallsvariable
Erwartungswert	$\mu = \sum p_i \cdot w_i$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$
Varianz	$\sigma^2 = \sum p_i \cdot (w_i - \mu)^2$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Zufallsvariable

IMBIE

Dichtefunktion f



Wie groß ist der Erwartungswert?

Vermutung: 180

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \quad = \int_{0}^{360} x \cdot f(x)\,dx \quad = \frac{1}{360} \cdot \int_{0}^{360} x\,dx \quad = \frac{1}{360} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{360}$$

$$= \frac{1}{360} \cdot \left(\frac{360^2}{2} - 0\right) = \frac{360}{2} = 180$$