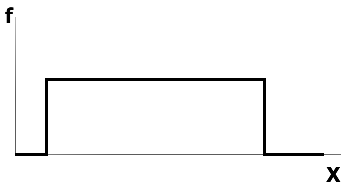
Normalverteilung

IMBIE



Gibt es ein Beispiel aus Medizin / Biologie für eine Zufallsvariable mit Gleichverteilung?

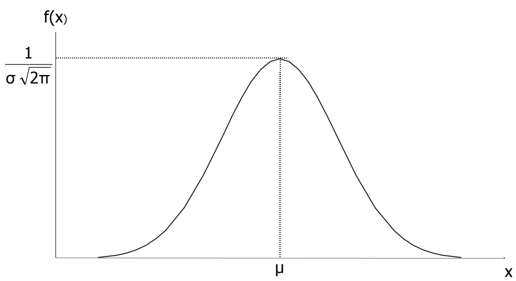
Wie sehen Verteilungen der in der Natur vorkommenden Größen aus?

Normalverteilung

IMBIE

Normalverteilung

universitätbonn IMBIE



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Normalverteilung N(μ, σ²)

Parameter: μ , **σ**

$x \to \infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to 0$

f(x) maximal für $x = \mu \quad \Rightarrow \quad f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

f(x) symmetrisch zu μ

Normalverteilung

universitätbonn IMBIE

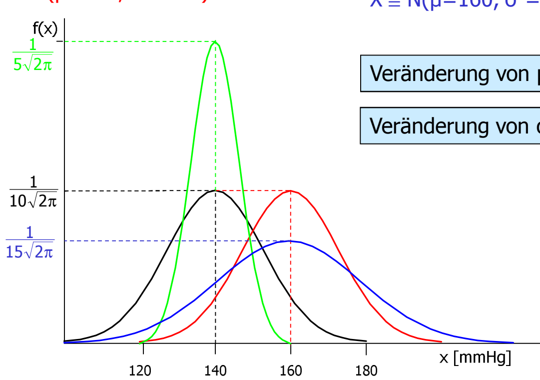
Beispiel: Blutdruck

$X \cong N(\mu=140, \sigma^2=100)$

$X \cong N(\mu=160, \sigma^2=100)$

$X \cong N(\mu=140, \sigma^2=25)$

$X \cong N(\mu=160, \sigma^2=225)$

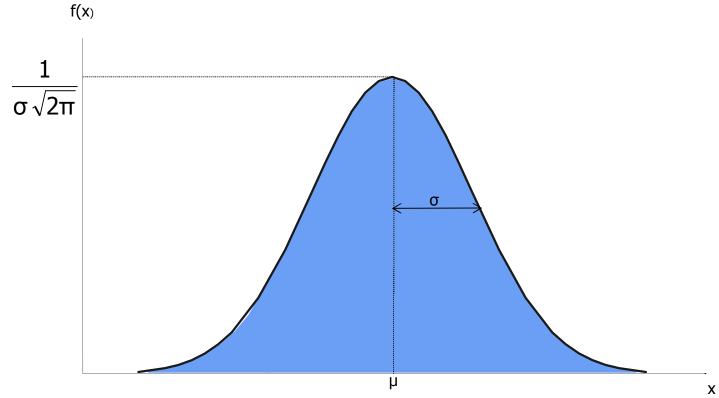


Veränderung von μ ⇒ Verschiebung auf der x-Achse

Veränderung von σ ⇒ Streckung/Stauchung der Kurve

Normalverteilung

$X \cong N(\mu, \sigma^2)$

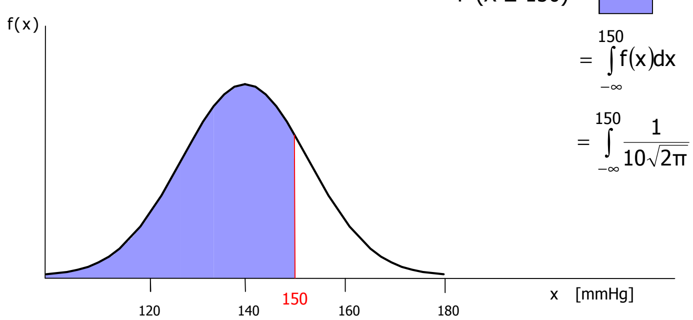


Fläche unter der Kurve ist die Gesamtwahrscheinlichkeit (=1).

Normalverteilung

<u>Frage</u>: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient einen Blutdruck kleiner gleich 150 mmHg hat?

(Der Blutdruck sei normalverteilt mit μ=140 und σ^2=100)



$$P(X \leq 150) = \boxed{}$$

$$= \int_{-\infty}^{150} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{150} \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-140}{10}\right)^2} dx$$

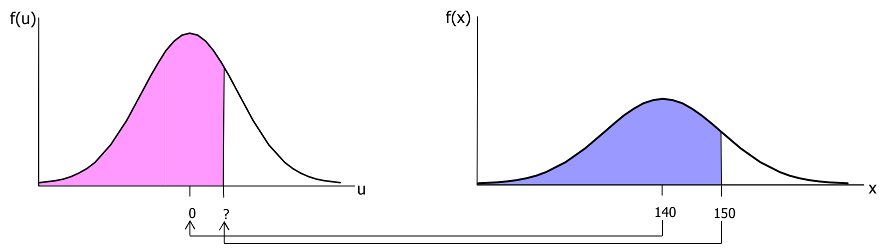
Normalverteilung

Standardnormalverteilung N(0, 1)

N(140, 100)

P (U ≤ ?) =

P(X ≤ 150) =



Transformation

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$P(X \le 150) = P\left(U \le \frac{150-140}{10}\right) = P(U \le 1)$$

Normalverteilung

Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ der N(0, 1) -Verteilung

↓u→	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5190	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7969	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8513	.8554	.8577	.8529	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

universitätbonn

Normalverteilung

IMBIE

Jede Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist durch Transformation in die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ überführbar.

Normalverteilung		Standard-normalverteilung
$N(\mu, \sigma^2)$	$\xrightarrow{u = \frac{x-\mu}{\sigma}}$ $\xleftarrow[x = \mu + u \cdot \sigma]{}$	$N(0, 1)$

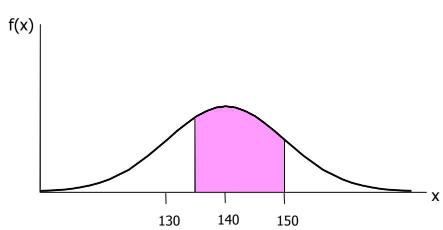
universitätbonn

Normalverteilung

IMBIE

Typische Fragestellung: $P(135 < X \leq 150) =$ $=$ $P(X \leq 150) - P(X \leq 135)$

$N(140, 100)$



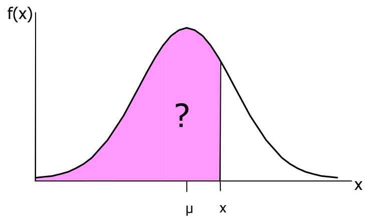
Wahrscheinlichkeiten sind Flächen unter der Kurve.

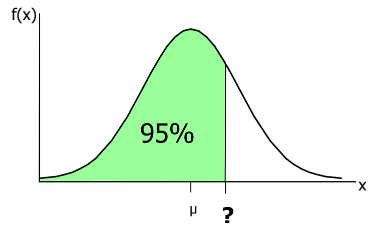
Normalverteilung: Quantile

IMBIE

$P(X \leq x) =$ **?**

$P(X \leq ?) =$ 0,95





$X_{0,95}$: 95% Quantil

Tabelle 1a: Quantile u_p der N(0, 1) –Verteilung

p =	0.750	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.9975	0.9990	0.9995
u_p =	0.6745	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	2.8070	3.0902	3.2905

Normalverteilung

IMBIE

Jede Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist durch Transformation in die Standardnormalverteilung N(0, 1) überführbar.

Normalverteilung — Standard-normalverteilung

$$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{u = \frac{x-\mu}{\sigma}} N(0, 1)$$

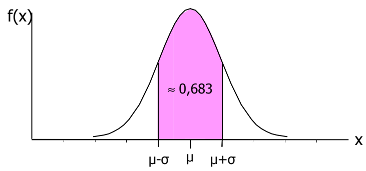
$$N(0, 1) \xrightarrow{x = \mu + u \cdot \sigma} N(\mu, \sigma^2)$$

universitätbonn

Normalverteilung

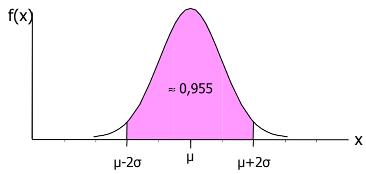
IMBIE

Ausgewiesene Bereiche der Normalverteilungsdichte:



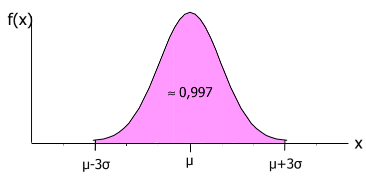
1 σ – Bereich:

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$



2 σ – Bereich:

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}5\%$



3 σ – Bereich:

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$