universitätbonn

Schließende Statistik

IMBIE

Deskriptive Statistik: Beschreibung von endlich vielen gemachten Beobachtungen (keine weitergehenden Aussagen)

Wahrscheinlichkeitsrechnung: Theoretische, modellbasierte Überlegungen (keine empirischen Beobachtungen)

Schließende Statistik: Verknüpfung von deskriptiver Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Auf der Basis von empirischen Beobachtungen (Stichproben) werden Aussagen zur Grundgesamtheit (Modell) gemacht

Problem: Die Aussagen der schließenden Statistik können nie deterministisch (100%ig) sein.

- Hinweis: Eine Aussage kann immer „falsch" sein
- Wahrscheinlichkeit für einen „Irrtum" angeben

universitätbonn

Schließende Statistik

IMBIE

Einfachste Situation einer Aussage in der schließenden Statistik:

Entscheidung zwischen zwei alternativen Hypothesen auf der Basis von Information

Beispiel: Angeklagter vor Gericht

Information: Zeugenaussagen, Beweise, DNA-Gutachten, ...

Entscheidung durch den Richter: unschuldig - schuldig

Der Richter hat für seine Entscheidung zwei Hypothesen:

H_0: Angeklagter ist unschuldig (Nullhypothese)
H_1: Angeklagter ist schuldig (Alternativhypothese)

Was kann bei der Entscheidung passieren?

Schließende Statistik: Fehlerarten

IMBIE

Beispiel: Angeklagter vor Gericht

H_0: Angeklagter ist unschuldig (Nullhypothese)

H_1: Angeklagter ist schuldig (Alternativhypothese)

Welche Situationen sind in den Feldern gegeben?

Richterspruch/ Entscheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0 unschuldig	Unbekannte Wirklichkeit H_1 schuldig
H_0 unschuldig	✔	
H_1 schuldig		✔

1) Richtige Entscheidung: Ein Unschuldiger wird freigesprochen
2) Richtige Entscheidung: Ein Schuldiger wird verurteilt
3) Falsche Entscheidung: Ein Unschuldiger wird verurteilt
4) Falsche Entscheidung: Ein Schuldiger wird freigesprochen

Schließende Statistik: Fehlerarten

IMBIE

Richterspruch/ Entscheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0 unschuldig	Unbekannte Wirklichkeit H_1 schuldig
H_0 unschuldig		**Fehler 2. Art**
H_1 schuldig	**Fehler 1. Art**	

Die Situation 3 (ein Unschuldiger wird verurteilt) und Situation 4 (ein Schuldiger wird freigesprochen) sind **Fehlentscheidungen**.

Diese Fehlentscheidungen sind unterschiedlich in ihrer Art und Bedeutung!

Situation 3: **Fehler 1. Art**

Situation 4: **Fehler 2. Art**

universitätbonn

Schließende Statistik: Fehlerarten

IMBIE

Richterspruch/ Entscheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0 unschuldig	H_1 schuldig
H_0 unschuldig		**Fehler 2. Art**
H_1 schuldig	**Fehler 1. Art**	

Bezeichnung:

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art: $\boldsymbol{\alpha}$

Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art: $\boldsymbol{\beta}$

Frage (bei gegebener Situation): Die Wahrscheinlichkeit für welchen Fehler will der Richter „klein machen"?

Antwort: Im Prinzip möchte der Richter beide Fehlerraten „möglichst klein" haben.

Strategie:

Möglichst wenige Unschuldige fälschlicherweise verurteilen („α klein machen")
$\Rightarrow$ in allen Gerichtsfällen auf „unschuldig" entscheiden
$\Rightarrow$ $\alpha = 0$
$\Rightarrow$ viele Schuldige bleiben „frei"
$\Rightarrow$ $\beta \uparrow$

Alle Schuldigen verurteilt wissen („ β klein machen")
$\Rightarrow$ in allen Gerichtsfällen auf „schuldig" entscheiden
$\Rightarrow$ $\beta = 0$
$\Rightarrow$ viele Unschuldige werden verurteilt
$\Rightarrow$ $\alpha \uparrow$

universitätbonn

Schließende Statistik: Fehlerarten

IMBIE

Entscheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0	H_1
H_0		**Fehler 2. Art (β)**
H_1	**Fehler 1. Art (α)**	

Aussage: $\alpha \leftrightarrow \beta$

abhängig von a) Entscheidungsprozess
b) Informationsmenge

Welcher Fehler (α, β) ist der „schlimmere"?

$\rightarrow$ kann nicht grundsätzlich gesagt werden, hängt von den zu beurteilenden Hypothesen ab.

Beispiel1: Gerichtsfall

Hier ist eindeutig α der zu minimierende Fehler.

„In dubio pro reo" (im Zweifel für den Angeklagten)

Schließende Statistik: Fehlerarten

Beispiel 2: Ist ein teures neues Medikament besser wirksam als ein billigeres Standardpräparat?

H_0: neues teures Medikament ist nicht besser als das billigere Standardpräparat
H_1: neues teures Medikament ist besser als das billigere Standardpräparat

Entscheidung	Unbekannte Wirklichkeit: billiges altes H_0	Unbekannte Wirklichkeit: neues teures H_1
H_0 - billiges altes		**Fehler 2. Art (β)**
H_1 – neues teures	**Fehler 1. Art (α)**	

Fehler 1. Art (α):
Es wird zukünftig das neue teure Medikament verabreicht, obwohl es nicht besser wirkt.

Konsequenzen:
a) Patient erhält keine bessere Therapie
b) Kostenanstieg in der Patientenversorgung

Fehler 2. Art (β):
Es wird nicht erkannt, dass das neue teure Medikament besser ist als das alte billigere

Konsequenzen:
a) Patient erhält nicht die bessere Therapie
b) Verlust der Entwicklungskosten

Schließende Statistik: Hypothesen

Formulierung von Hypothesen

Beispiel: Medikament zur Senkung des Blutdrucks bei Hypertonikern

H_0: Das Medikament wirkt nicht
H_1: Das Medikament wirkt

1) Woran wird die „Wirkung" gemessen?

→ Zielgröße X festlegen

X: systolischer Blutdruck in mmHg

2) Untersuchung

Patient: Messung vor Medikament: 190 mmHg
Messung nach Medikament: 185 mmHg
} Blutdruck ist gesenkt
⇒ H_1 ist richtig ???
Kleiner Unterschied kann Zufall sein !

Patient: Messung vor Medikament: 190 mmHg
Messung nach Medikament: 140 mmHg
} Prima Medikament ???
Unterschied kann individuell begründet sein

→ Stichprobe / unabhängige Wiederholung

Formulierung von Hypothesen

Die Zielgröße muss an einer Stichprobe von unabhängigen Patienten / Probanden gemessen werden.

Patient	x_i vorher	x_i nachher	Differenz d_i
1	190	185	5
2	185	175	10
3	180	185	-5
4	180	180	0
5	190	170	20
⋮	⋮	⋮	⋮
n	190	175	15
	$\bar{x}_{vorher}$	$\bar{x}_{nachher}$	$\bar{d}$

Welche Größe interessiert für die Entscheidung?

1) Die Einzelwerte? Nein!
2) Die Mittelwerte der Einzelwerte $\bar{x}_{vorher}, \bar{x}_{nachher}$? Nein!
3) Die Mittelwerte der Differenzen $\bar{d}$? Ja!

→ Die Entscheidung beruht auf dem Mittelwert der „Blutdrucksenkungen"

→ Es soll eine Aussage gemacht werden über die „Blutdrucksenkung" in der Grundgesamtheit

→ Es soll eine Aussage über den Erwartungswert μ_d der Zielgröße X in der Grundgesamtheit gemacht werden

Formulierung von Hypothesen

→ Es soll eine Aussage gemacht werden über die „Blutdrucksenkung" in der Grundgesamtheit

→ Es soll eine Aussage über den Erwartungswert μ_d der Zielgröße X in der Grundgesamtheit gemacht werden

Die Hypothesen bzgl. der Zielgröße X müssen in Form des Erwartungswertes formuliert werden

X: Zielgröße: Blutdrucksenkung in mmHg

H_0: Das Medikament wirkt nicht: $\mu_d = 0$ $(\mu_d \leq 0)$

H_1: Das Medikament wirkt: $\mu_d > 0$

universitätbonn

Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE

X: Zielgröße: „Blutdrucksenkung“ [mmHg]

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d > 0$

Stichprobe 1

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
50	190	175	15
n=50			$\bar{d}_1$

Stichprobe 2

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	185	180	5
2	180	190	-10
⋮	⋮	⋮	⋮
70	175	180	-5
n=70			$\bar{d}_2$

Stichprobe 3

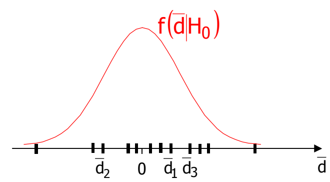
$n = 55 \rightarrow \bar{d}_3$

usw.

Gedankenexperiment 1

Es sei bekannt, dass gilt:

H_0: $\mu_d = 0$



Die $\bar{d}_i$ der Versuchswiederholungen folgen einer Verteilung mit $\mu_d = 0$.

universitätbonn

Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE

X: Zielgröße: „Blutdrucksenkung“ [mmHg]

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d > 0$

Stichprobe 1

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
50	190	175	15
n=50			$\bar{d}_1$

Stichprobe 2

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	185	180	5
2	180	190	-10
⋮	⋮	⋮	⋮
70	175	180	-5
n=70			$\bar{d}_2$

Stichprobe 3

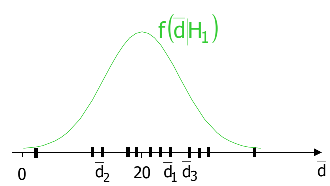
$n = 55 \rightarrow \bar{d}_3$

usw.

Gedankenexperiment 2

Es sei bekannt, dass gilt:

H_1: $\mu_d = 20$



Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE

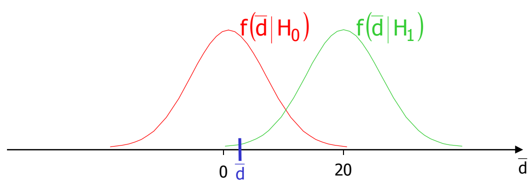
X: „Blutdrucksenkung“ [mmHg]

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d > 0$

Stichprobe

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
50	190	175	15
n=50			$\bar{d}$

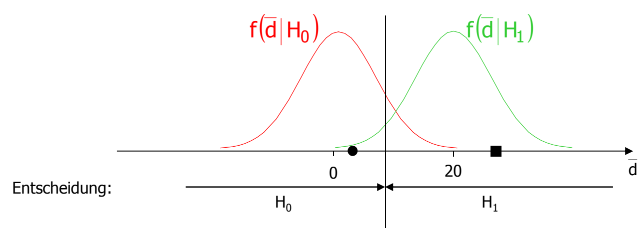


Alles was wir haben, ist
eine Stichprobe mit einem $\bar{d}$

→ Entscheidung fällen

Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE



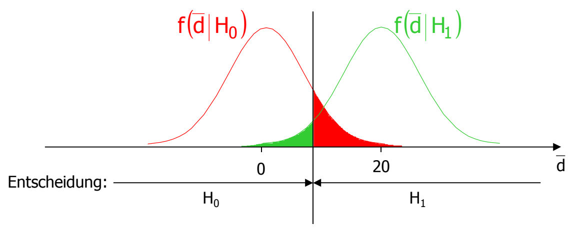
$\bar{d}$ = ● → H_0 ist richtig

$\bar{d}$ = ■ → H_1 ist richtig

Die Entscheidung „kippt“ an einer festzusetzenden Grenze um.

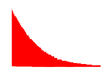
Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE



Ent-scheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0	Unbekannte Wirklichkeit H_1
H_0		β
H_1	α	

Wo sind α und β in der Grafik zu finden?

α: P(Entscheidung: H_1 | Wirklichkeit: H_0)= 

β: P(Entscheidung: H_0 | Wirklichkeit: H_1)=