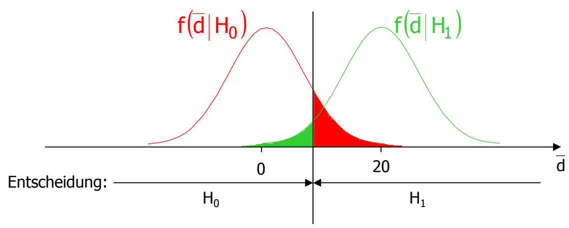
Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE



Ent-scheidung	Unbekannte Wirklichkeit H_0	Unbekannte Wirklichkeit H_1
H_0		β
H_1	α	

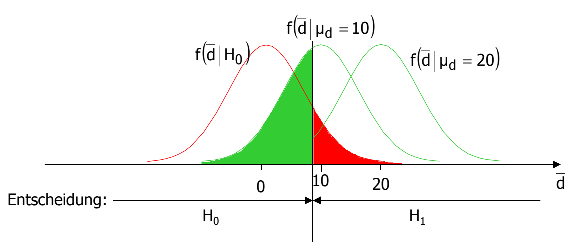
Wo sind α und β in der Grafik zu finden?

α: P(Entscheidung: H_1 | Wirklichkeit: H_0)= 

β: P(Entscheidung: H_0 | Wirklichkeit: H_1)= 

Schließende Statistik: Testtheorie

IMBIE



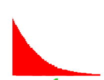
An welcher Stelle wurden Sie über den Tisch gezogen?

Antwort: H_1: μ_d = 20

H_1 lautet $\mu_d > 0$

Was passiert, wenn gilt H_1: μ_d = 10?

a) <u>in der Grafik</u>
Die Dichtefunktion $f(\bar{d}|H_1)$ verschiebt sich nach links,
die Dichtefunktion $f(\bar{d}|H_0)$ verändert sich nicht.

b) <u>mit α</u>
α verändert sich nicht: P(Entscheidung: H_1 | Wirklichkeit: H_0)= 

c) <u>mit β</u>
β verändert sich: P(Entscheidung: H_0 | Wirklichkeit: H_1)= 

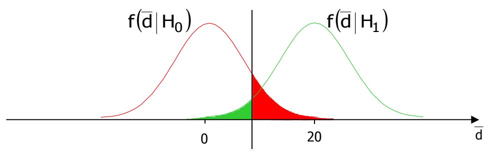
Schließende Statistik: Testtheorie

Konsequenz:

- α kann fest definiert werden
- β ist (zunächst) nicht definiert, da die Alternativhypothese nicht definiert ist

Ausweg: Minimal relevante Differenz

Beispiel: Nur Blutdrucksenkungen von <u>mindestens</u> 20 mmHg sind therapeutisch wichtig



→ β kann nach oben abgeschätzt werden

(1 - β) =: Power (Mächtigkeit) eines Tests

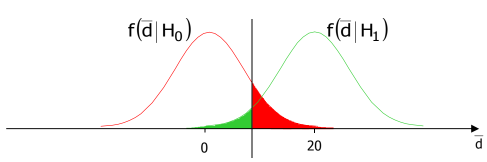
Schließende Statistik: Testtheorie

Konsequenz:

- α kann fest definiert werden
- β ist (zunächst) nicht definiert, da die Alternativhypothese nicht definiert ist

Ausweg: Minimal relevante Differenz

Beispiel: Nur Blutdrucksenkungen von <u>mindestens</u> 20 mmHg sind therapeutisch wichtig



→ β kann nach oben abgeschätzt werden

(1 - β) =: Power (Mächtigkeit) eines Tests

universitätbonn

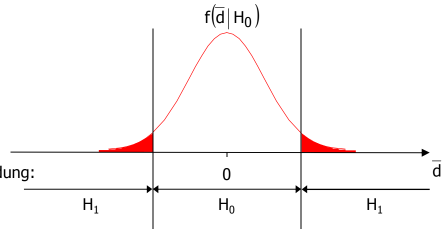
Schließende Statistik:
einseitige – zweiseitige Fragestellung

IMBIE

H_0: keine Wirkung $\mu_d = 0$

H_1: Wirkung $\mu_d \neq 0$

In welche Richtung die Wirkung geht, ist nicht vorhergesagt



- Entscheidungsgrenzen an beiden Seiten der Verteilung
- Fehler 1. Art: α = P(Entscheidung: H_1 | Wirklichkeit: H_0) =  +  $= \alpha/2 + \alpha/2$

universitätbonn

Schließende Statistik:
Entscheidungsgrenze - Quantil

IMBIE

H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d > 0$

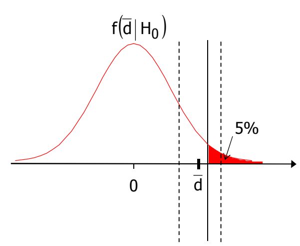
Einseitige Fragestellung

α = 5 %

Stichprobe

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	190	175	15

$\bar{d}$



Wo lege ich meine Entscheidungsgrenze hin?

~~Ich will ein „signifikantes" Ergebnis~~ → links von $\bar{d}$

~~Ich will kein „signifikantes" Ergebnis~~ → rechts von $\bar{d}$

FALSCH !

Die Entscheidungsgrenze muss **<u>vor</u>** der Stichprobe festgelegt werden.

Die Entscheidungsgrenze wird festgelegt indem α festgelegt wird.

Wie sieht die Entscheidungsgrenze bei festgelegtem α = 5 % aus ?

Es ist das 95% - Quantil von $f(\bar{d}\,|\,H_0)$

Schließende Statistik:
Entscheidungsgrenze - Quantil

Wie sieht die Verteilung aus ?

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum X_i \qquad X_i \approx N(0,\sigma^2)$$

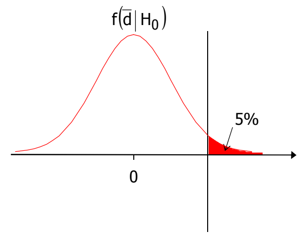
X, Y normalvt. dann auch X+Y und aX

E(X+Y) = E(X) + E(Y)   Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)

E(aX) = aE(X)   Var(aX) = a^2Var(X)

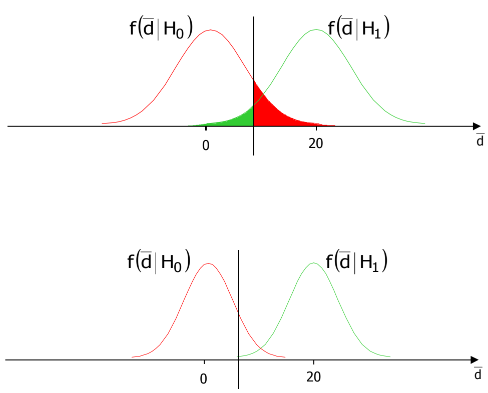
$$E[\bar{d}] = E\left[\frac{1}{n}\sum X_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum X_i\right] = \frac{1}{n}\sum E[X_i] = \mu = 0$$

$$Var(\bar{d}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$



$$c = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha} = 0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.95}$$

Schließende Statistik: Testtheorie



Schließende Statistik:
Prüfgröße - Teststatistik

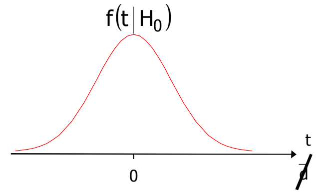
Hypothesen
H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d \neq 0$

$\alpha = 5$ %

Stichprobe

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	190	175	15

$\bar{d}$



Was geht in die Größe zur Entscheidungsfindung ein?

- Mittelwert der Differenzen $\bar{d}$
- Standardabweichung s
- Stichprobenumfang n

→ **Teststatistik t**

Schließende Statistik:
t- Test für verbundene Stichproben

Zielgröße: Blutdrucksenkung d

Hypothesen
H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d \neq 0$
(Zweiseitige Fragestellung)

$\alpha = 5$ %

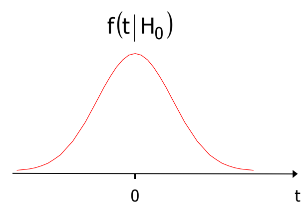
Stichprobe

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
n	190	175	15

$\rightarrow \quad \bar{d}, s, n$

Bilde die Prüfgröße:

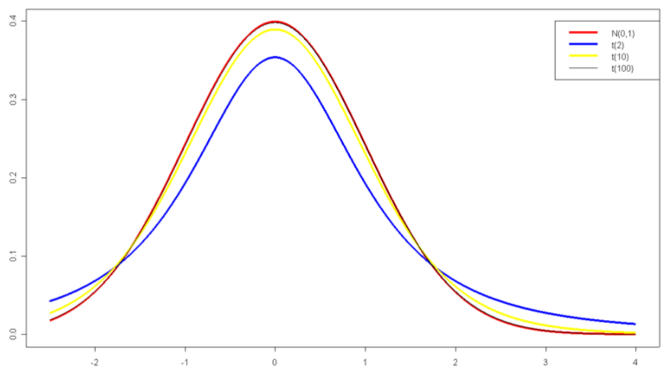
$$t := \frac{|\bar{d}|}{s} \cdot \sqrt{n}$$



Voraussetzung: d_i normalverteilt
$\Rightarrow$ Prüfgröße t ist t- verteilt mit (n-1) Freiheitsgraden

Schließende Statistik: t- Verteilung

Dichtefunktionen von t-verteilten Zufallsgrößen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden



Tab. 2: Quantile $t_{f;0.95}$ und $t_{f;0.975}$ der t_f – Verteilung

	p=	
f=	0,95	0,975
1	6.314	12.706
2	2.920	4.303
3	2.353	3.182
4	2.132	2.776
5	2.015	2.571
6	1.943	2.447
7	1.895	2.365
8	1.860	2.306
9	1.833	2.262
10	1.812	2.228
11	1.796	2.201
12	1.782	2.179
13	1.771	2.160
14	1.761	2.145
15	1.753	2.131
20	1.725	2.086
30	1.697	2.042
40	1.684	2.021
50	1.676	2.009
60	1.671	2.000
70	1.667	1.994
80	1.664	1.990
90	1.662	1.987
100	1.660	1.984
200	1.653	1.972
∞	1.645	1.960

Schließende Statistik: t- Test für verbundene Stichproben (Beispiel)

Zielgröße: Blutdrucksenkung d

Hypothesen
H_0: $\mu_d = 0$
H_1: $\mu_d \neq 0$
(Zweiseitige Fragestellung)

$\alpha = 5$ %

Stichprobe

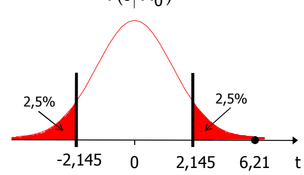
Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
15	190	175	15

$\rightarrow$ $\bar{d} = 10{,}05$
$s = 6{,}27$
$n = 15$

$$t = \frac{|\bar{d}|}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{|10{,}05|}{6{,}27} \cdot \sqrt{15} = 6{,}21$$

Entscheidung

$f(t \mid H_0)$



n=15 $\Rightarrow$ f=n-1=14

	p=	
f=	0,950	0,975
13	1.771	2.160
14	1.761	2.145
15	1.753	2.131
20	1.725	2.086

Vergleiche t = 6,21 mit dem Quantil

$t = 6{,}21 > 2{,}145 = t_{14;\,0.975}$

Entscheidung:

H_0 verwerfen
H_1 annehmen
mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α=5 %

Schätzen des Erwartungswertes

universitätbonn

IMBIE

X: Zielgröße: „Blutdrucksenkung“ [mmHg]

H_0: $\mu_d = 0$

H_1: $\mu_d > 0$

Stichprobe 1

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	190	185	5
2	180	185	-5
⋮	⋮	⋮	⋮
50	190	175	15
n=50			$\bar{d}_1$

Stichprobe 2

Patient	vorher	nachher	Differenz
1	185	180	5
2	180	190	-10
⋮	⋮	⋮	⋮
70	175	180	-5
n=70			$\bar{d}_2$

Stichprobe 3

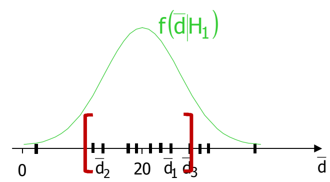
$n = 55 \quad \rightarrow \bar{d}_3$

usw.

Gedankenexperiment 2

Es sei bekannt, dass gilt:

H_1: $\mu_d = 20$



Schätzen des Erwartungswertes

universitätbonn

IMBIE

Ein Intervall (symmetrisch zum emp. Mittelwert)

$$[\bar{x} - c, \bar{x} + c]$$

das mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (1-α) den wahren Parameter überdeckt.

Für eine Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2 ist das z.B.:

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1+\alpha/2}\right]$$

Konfidenzintervall

Ist die Varianz nicht bekannt :

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}, \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1+\alpha/2}\right]$$

Konfidenzwahrscheinlichkeit (1-α)

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Coverage probability